20 Μαΐου 2013

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Απαντήσεις Θεμάτων Πανελληνίων Εξετάσεων Ημερησίων & Γενικών Λυκείων

Περιεχόμενα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο **σελίδα 28**.

Α2. Σχολικό βιβλίο **σελίδα 14**.

Α3. Σχολικό βιβλίο **σελίδα 87**.

Α4.

α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

$A = \{\omega_1, \omega_4\}$

$B = \{\omega_1, \omega_3\}$

Β1.

$$P(\omega_1) = \frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$$

- $\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right) = \sqrt{1}-1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3+x^2\right) = -1+1 = 0$

Για x κοντά στο -1, θέτω:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^2(x+1)} = \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-1^2}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = \frac{x^2+x}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

$$= \frac{x(x+1)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = \frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = \lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}\right) = \dfrac{1}{-1\cdot\left(\sqrt{1}+1\right)} = -\dfrac{1}{2}$

Οπότε, $P(\omega_1) = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$

Η $f(x) = \dfrac{x}{3}\ln x,\ x\in(0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγισίμων με

$f'(x) = \left(\dfrac{x}{3}\right)'\ln x + \dfrac{x}{3}(\ln x)' = \dfrac{1}{3}\ln x + \dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}(\ln x+1)$

Άρα για $x=1$ έχω $f'(1) = \dfrac{1}{3}(\ln 1+1) = \dfrac{1}{3} = P(\omega_3)$

B2.

$A = \{\omega_1,\omega_4\}$ άρα $A' = \{\omega_2,\omega_3\}$

- $\{\omega_3\}\subseteq A' \Rightarrow P(\omega_3)\le P(A') \Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{3}\le P(A')}\ (1)$
- $\{\omega_1\}\subseteq A \Rightarrow P(\omega_1)\le P(A) \Rightarrow \dfrac{1}{4}\le 1-P(A') \Rightarrow \boxed{P(A')\le\dfrac{3}{4}}\ (2)$

Από $(1),(2)$: $\boxed{\dfrac{1}{3}\le P(A')\le\dfrac{3}{4}}$

B3.

- $P(A') = \dfrac{3}{4} \Rightarrow 1-P(A) = \dfrac{3}{4} \Rightarrow P(A) = \dfrac{1}{4}$

  Οπότε,

  $P(A) = P(\omega_1)+P(\omega_4) \Rightarrow \dfrac{1}{4} = P(\omega_1)+P(\omega_4) \Rightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}+P(\omega_4) \Rightarrow P(\omega_4) = 0$
- Γνωρίζουμε ότι:

  $P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4) = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{4}+P(\omega_2)+\dfrac{1}{3}+0 = 1 \Rightarrow$

  $P(\omega_2) = 1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2} \Rightarrow P(\omega_2) = \dfrac{12}{12}-\dfrac{3}{12}-\dfrac{4}{12} \Rightarrow \boxed{P(\omega_2) = \dfrac{5}{12}}$
- $A-B = \{\omega_4\}$ άρα $\boxed{P(A-B) = P(\omega_4) = 0}\ (1)$

$B-A=\{\omega_3\}$ άρα $\boxed{P(B-A)=P(\omega_3)=\frac{1}{3}}$ (2)

$P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A-B)+P(B-A)$ αφού $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

Οπότε, $P[(A-B)\cup(B-A)]\overset{(1),(2)}{=}0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

- $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$

  $B'=\{\omega_2,\omega_4\}$

  $1^{ος}$ τρόπος : $A'-B'=\{\omega_3\}$, άρα $\boxed{P(A'-B')=P(\omega_3)=\frac{1}{3}}$

  $2^{ος}$ τρόπος : Άρα, $A'\cap B'=\{\omega_2\}$ οπότε, $P(A'\cap B')=P(\omega_2)=\frac{5}{12}$

  Συνεπώς,

  $P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=\frac{3}{4}-\frac{5}{12}=\frac{9}{12}-\frac{5}{12}=\frac{4}{12}\Rightarrow\boxed{P(A'-B')=\frac{1}{3}}$

Θέμα Γ

Γ1.

Έστω οι 4 ισοπλατείς κλάσεις, πλάτους c

i	κλάσεις	x_i
1	$[50,50+c)$	$\cdots$
2	$[50+c,50+2c)$	$\cdots$
3	$[50+2c,50+3c)$	$\cdots$
4	$[50+3c,50+4c)$	85

Άρα $\frac{50+3c+50+4c}{2}=85\Leftrightarrow 100+7c=170\Leftrightarrow 7c=70\Leftrightarrow\boxed{c=10}$

Γ2.

Από το ερώτημα (Γ1): c=10 και από δεδομένα $\boxed{f_4=2f_3}$(1)

Άρα κλάσεις: $[50,60)$, $[60,70)$, $[70,80)$, $[80,90)$

$x_1=\frac{50+60}{2}=55$ $\qquad$ $x_2=\frac{60+70}{2}=65$

$x_3=\frac{70+80}{2}=75$ $\qquad$ $x_4=\frac{80+90}{2}=85$

Αφού $\delta = 75 = x_3$ και γνωρίζουμε ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα και συμμετρικά κατανεμημένες σε κάθε κλάση γύρω από την κεντρική τιμή και η διάμεσος χωρίζει το δείγμα σε δύο ίσα μέρη:

$$f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = \frac{f_3}{2} + f_4 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = f_4 \quad (2)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f_4 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow 2f_4 + f_3 = 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 4f_3 + f_3 = 1 \Leftrightarrow 5f_3 = 1 \Leftrightarrow f_3 = 0,2$$

Από $(1): f_4 = 2 \cdot 0,2 = 0,4$

$$\bar{x} = 74 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot f_i = 74 \Leftrightarrow 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 75 \cdot 0,2 + 85 \cdot 0,4 = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 15 + 34 = 74$$

$$\Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 = 25 \Leftrightarrow 11f_1 + 13f_2 = 5 \quad (3)$$

$$(2): f_1 + f_2 = 0,4 \Leftrightarrow f_1 = 0,4 - f_2 \quad (4)$$

Οπότε:

$$(3) \overset{(4)}{\Rightarrow} 11 \cdot (0,4 - f_2) + 13f_2 = 5 \Leftrightarrow 4,4 - 11f_2 + 13f_2 = 5 \Leftrightarrow 2f_2 = 0,6 \Leftrightarrow f_2 = 0,3$$

Συνεπώς: $f_1 = 0,4 - 0,3 = 0,1$

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

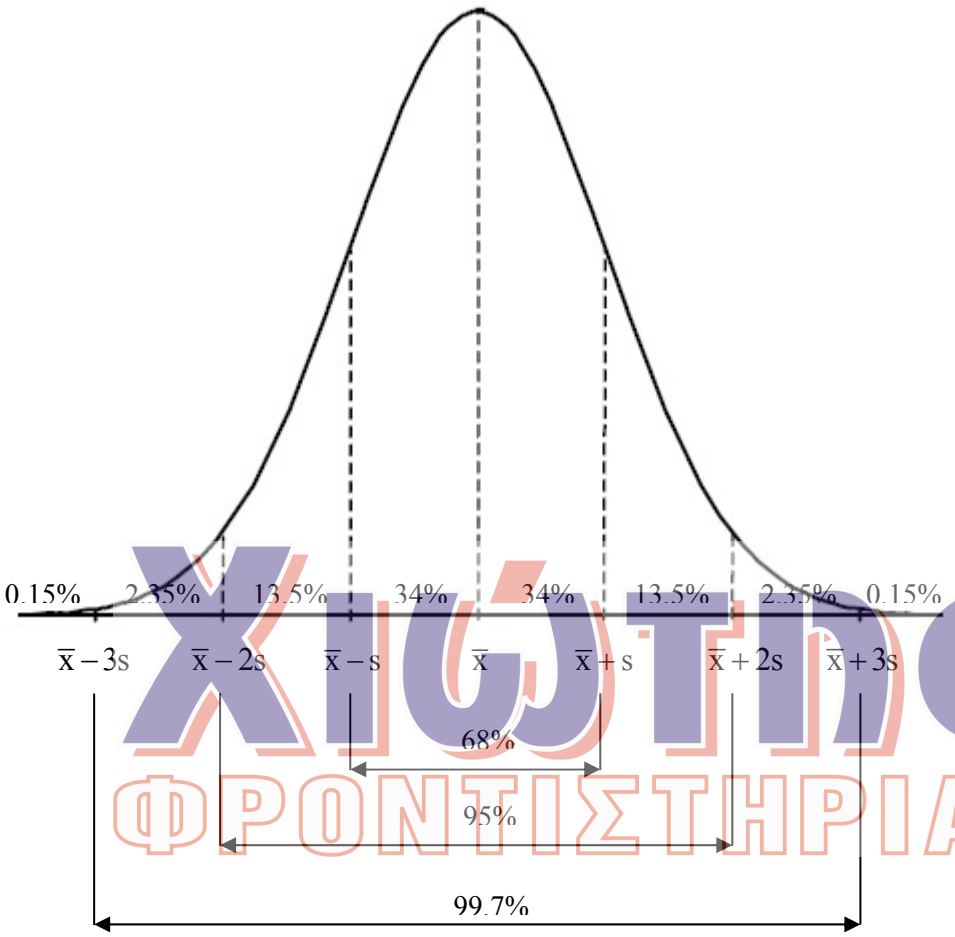
κλάσεις	x_i	f_i
$[50,60)$	55	0,1
$[60,70)$	65	0,3
$[70,80)$	75	0,2
$[80,90)$	85	0,4
Σύνολο	-	1

Γ3. Το πλήθος των παρατηρήσεων με τιμή μικρότερη του 80 είναι: $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3$

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i \cdot \nu_i}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} \overset{f_i = \frac{\nu_i}{\nu} \Leftrightarrow \nu_i = f_i \cdot \nu}{=} \frac{x_1 \cdot f_1 \cdot \nu + x_2 \cdot f_2 \cdot \nu + x_3 \cdot f_3 \cdot \nu}{f_1 \cdot \nu + f_2 \cdot \nu + f_3 \cdot \nu} = \frac{\nu \cdot (f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3)}{\nu \cdot (f_1 + f_2 + f_3)} =$$

$$= \frac{55 \cdot 0,1 + 65 \cdot 0,3 + 75 \cdot 0,2}{0,1 + 0,3 + 0,2} = \frac{40}{0,6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3}$$

Γ4.



- 2,5% είναι τουλάχιστον 74 δηλαδή $x \geq 74$. Όμως το 2,5% περικλείεται ή για $x \geq \bar{x}+2s$ ή $x \leq \bar{x}-2s$ άρα $\bar{x}+2s=74 \quad (1)$
- 16% είναι το πολύ 68 δηλαδή $x \leq 68$. Όμως το 16% περικλείεται ή για $x \geq \bar{x}+s$ ή $x \leq \bar{x}-s$ άρα $\bar{x}-s=68 \quad (2)$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1), (2): $3s=6 \Leftrightarrow \boxed{s=2}$

Από (2): $\bar{x}-2=68 \Leftrightarrow \boxed{\bar{x}=70}$

Οπότε $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{70}<\frac{7}{70}=\frac{1}{10}$ άρα ομοιογενές το δείγμα.

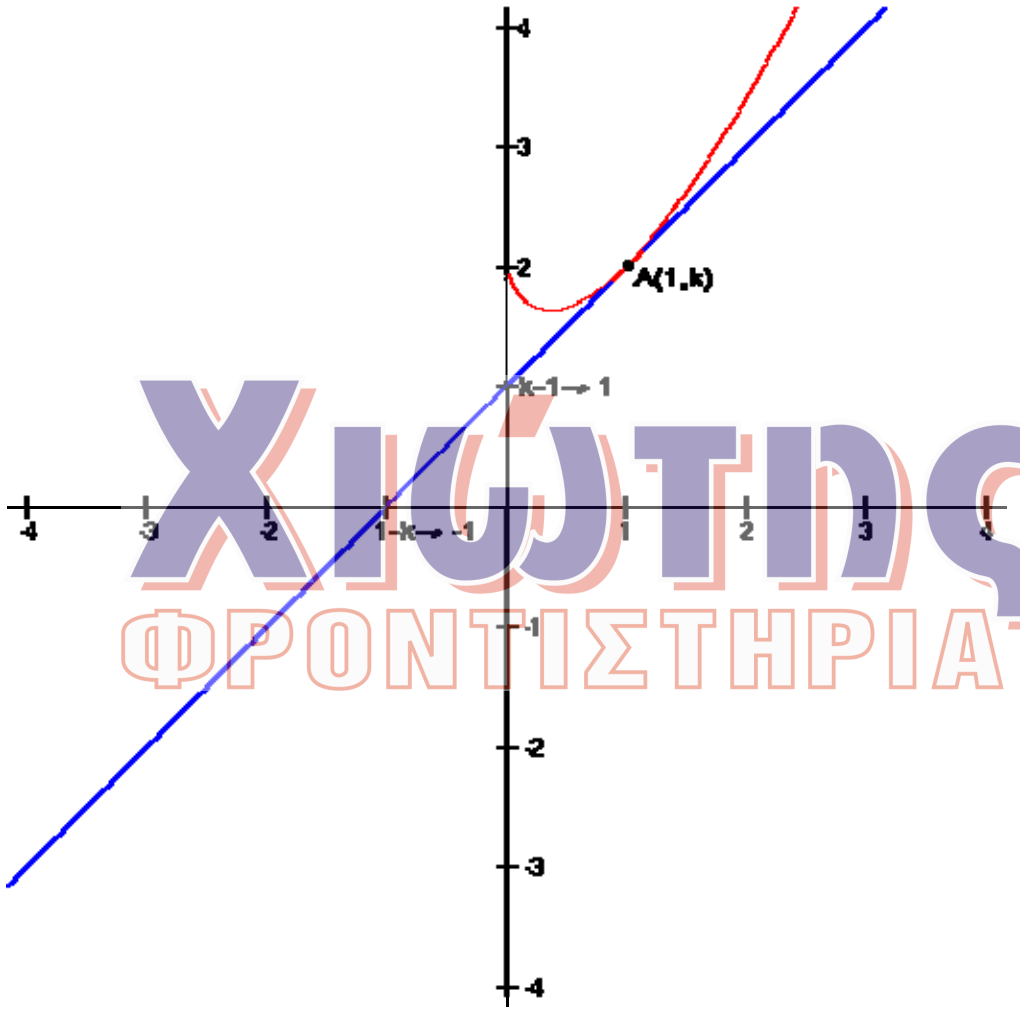
Θέμα Δ

$f(x) = x \cdot \ln x + \kappa,\ x > 0,\ \kappa \in Z,\ \kappa > 1$

Η εφαπτόμενη στο (1, f(1)) σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες με Ε < 2.

Δ1. $f(1) = 1 \cdot \ln 1 + \kappa \Leftrightarrow f(1) = \kappa$

Άρα το σημείο επαφής είναι το Α(1, κ).



$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (1)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞), με:

$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' + (\kappa)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f'(1) = \ln 1 + 1 = 1$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο (1, κ) είναι :

$(1) \Rightarrow y - \kappa = x - 1 \Leftrightarrow \boxed{y = x + \kappa - 1}$ και τέμνει τον xx΄ στο σημείο $A(x_o,0)$ οπότε $0 = x_o + \kappa - 1 \Leftrightarrow x_o = 1 - \kappa < 0$ και τον yy΄στο $B(0,y_o)$ οπότε $y_o = 0 + \kappa - 1 \Leftrightarrow y_o = \kappa - 1 > 0$

$$E=\frac{1}{2}|\kappa-1|\cdot|1-\kappa|=\frac{1}{2}|\kappa-1|^2=\frac{1}{2}(\kappa-1)^2<2$$

$$\Rightarrow(\kappa-1)^2<4\Leftrightarrow|\kappa-1|<2\Leftrightarrow-2<\kappa-1<2\Rightarrow\left.\begin{matrix}-1<\kappa<3\\ \kappa>1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}1<\kappa<3\\ \kappa\in Z\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{\kappa=2}$$

Για $\kappa=2$: $f(x)=x\ln x+2$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι **(ε): y = x + 1.**

Δ2.

Έστω $A_1(x_1, y_1)$, $A_1(x_2, y_2)$, …, $A_{50}(x_{50}, y_{50})$
50 σημεία της (ε): y = x + 1.

Οι τεταγμένες y_i, i=1,2, …, 50, έχουν $\bar{y}=31$.

α) Αφού $A_1, A_2, \ldots, A_{50} \in (\varepsilon): y=x+1$ (1)
Οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την (1) δηλ., $y_i=x_i+1, i=1,2,\ldots,50$
Τότε :

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{50}y_i}{v}\Leftrightarrow 31=\frac{x_1+1+x_2+1+\ldots+x_{50}+1}{50}\Leftrightarrow 31=\frac{\sum_{i=1}^{50}x_i+50}{50}\Leftrightarrow 31=\frac{\sum_{i=1}^{50}x_i}{50}+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 31=\bar{x}+1\Leftrightarrow\boxed{\bar{x}=30}$$

β)

- Οι $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ αυξάνονται κατά 3.
- Οι $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{35}$ παραμένουν σταθερές.
- Οι $x_{36}, x_{37}, \ldots, x_{50}$ ελαττώνονται κατά $\lambda>0$.

Η νέα μέση τιμή είναι $\bar{x}'=31$.

$$\bar{x}'=\frac{x_1+3+x_2+3+\ldots+x_{20}+3+x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{35}+x_{36}-\lambda+x_{37}-\lambda+\ldots+x_{50}-\lambda}{50}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 31=\frac{\sum_{i=1}^{50}x_i+20\cdot3-15\cdot\lambda}{50}\Leftrightarrow 31=\frac{\sum_{i=1}^{50}x_i}{50}+\frac{20\cdot3}{50}-\frac{15\cdot\lambda}{50}\Leftrightarrow 31=\bar{x}+\frac{6}{5}-\frac{3\cdot\lambda}{10}\Leftrightarrow$$

$$\overset{\bar{x}=30}{\Leftrightarrow}\frac{3\cdot\lambda}{10}=30-31+\frac{6}{5}\Leftrightarrow\frac{3\lambda}{10}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\boxed{\lambda=\frac{2}{3}}$$

Δ3.

$\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}=e^{7}$

$\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e$

$f(x)=x\ln x+2$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $f'(x)=\ln x+1$

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq -1\Leftrightarrow \ln x\geq \ln e^{-1}\overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} x\geq\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	$\nearrow$	

Ο.Ε.

- Αφού $f'(x)<0$ στο $\left(0,\frac{1}{e}\right)$, η $f\searrow$ στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ και

  Αφού $f'(x)>0$ στο $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$, η $f\nearrow$ στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$

- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=\frac{1}{e}$, το

  $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)+2=\frac{1}{e}\cdot(-1)+2=2-\frac{1}{e}>0$

$\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e \overset{f\nearrow \text{ στο } \left[\frac{1}{e},e\right)\subseteq\left[\frac{1}{e},+\infty\right)}{\Rightarrow} \boxed{f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)}\,(1)$

$\boxed{f'\left(\frac{1}{e}\right)=0}\,(2)$

Από $(1),(2)$: $f'\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$

$R=$ μεγαλύτερη $-$ μικρότερη παρατήρηση $\Leftrightarrow$

$R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)\Leftrightarrow R=e\ln e+2-0\Leftrightarrow \boxed{R=e+2}$

$$\bar{x}'' = \frac{f'\left(\frac{1}{e}\right)+f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)}{5} \Leftrightarrow$$

$$\bar{x}'' = \frac{0+\alpha\ln\alpha+2+\beta\ln\beta+2+\gamma\ln\gamma+2+e\ln e+2}{5} \Leftrightarrow$$

$$\bar{x}'' = \frac{8+\ln\alpha^{\alpha}+\ln\beta^{\beta}+\ln\gamma^{\gamma}+e}{5} \Leftrightarrow \bar{x}'' = \frac{8+e+\ln\left(\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}\right)}{5} \Leftrightarrow \bar{x}'' = \frac{8+e+\ln e^{7}}{5}$$

$$\bar{x}'' = \frac{8+e+7}{5} \Leftrightarrow \boxed{\bar{x}'' = \frac{15+e}{5}}$$

Δ4.

$$\Omega = \left\{t_n, n=1,2,\ldots,30 : 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{10} < \frac{1}{e} < t_{11} < \ldots < t_{30} = 1\right\}$$

$$A = \left\{\begin{array}{l} t \in \Omega : \text{η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } (t, f(t)) \text{ σχηματίζει} \\ \text{με τον άξονα } x'x \text{ οξεία γωνία} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{t \in \Omega : f'(t) > 0\right\}$$

$$B = \left\{t \in \Omega : f(t) > f'(t)+1\right\}, \quad f(t) = t\ln t + 2, \quad t > 0$$

α)

$$f'(t) = \ln t + 1, \quad t > 0$$

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

Οπότε: $A = \left\{t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{30} = 1\right\}$

$$N(A) = 20$$

$$N(\Omega) = 30$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} \Leftrightarrow \boxed{P(A) = \frac{2}{3}}$$

β)

Για το ενδεχόμενο Β:

$$f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t\ln t + 2 > \ln t + 1 + 1 \Leftrightarrow t\ln t - \ln t > 0 \Leftrightarrow \boxed{\ln t \cdot (t-1) > 0} (1)$$

$$0 < t < 1 \Leftrightarrow \boxed{t - 1 < 0} (2)$$

Από $(1),(2): \ln t < 0 \Leftrightarrow \ln t < \ln 1 \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} 0 < t < 1$

Οπότε $B = \{t_1, t_2, ..., t_{29}\}$

$A \cap B$: "πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α, Β"

Αφού:

$A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, ..., t_{29}\}, \quad N(A \cap B) = 19$

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}$$